MAT102 ANALİZ II DERSİ BÜTÜNLEME SINAV SORU CEVAPLARI

① $\arctan\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ fonksiyonu için $\frac{dy}{dx} = y'_x$, $\frac{dx}{dy} = x'_y$ türevlerini bulunuz.

$$\frac{d}{dx}\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \frac{y'_x\cdot x - 1\cdot y}{x^2+y^2} = \frac{x+y\cdot y'_x}{x^2+y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot y'_x - y = x + y\cdot y'_x \Rightarrow \boxed{y'_x = \frac{x+y}{x-y}}$$

Ters fonksiyon türev formülüne göre, $\boxed{x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{x-y}{x+y}}$ olur.

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{1-\cos x}$ ~~li~~mitini bulunuz.

$x\to 0$ da $\frac{0}{0}$ şeklinde L'Hospital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt\right)'}{(1-\cos x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot(x^2)'}{\sin x} = 2\cdot\lim_{x\to 0} x = 0$$

③ $f(x) = \arctan x - \ln(1+x^2)$, $x\in\mathbb{R}$ fonksiyonu veriliyor.

a) f nin yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

b) f nin monoton olduğu aralıkları bulunuz.

c) f nin bükeylik durumunu inceleyiniz.

Çözüm: a) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1-2x}{1+x^2} = 0 \Rightarrow 1-2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

$x = \frac{1}{2}$ ise $y = \arctan\frac{1}{2} - \ln\left(1+\frac{1}{4}\right)$

$y = \arctan\frac{1}{2} - \ln\left(1+\frac{5}{4}\right)$

$x = 1/2$ de yerel maksimum noktasıdır.

b) f, $(-\infty, 1/2)$ de artan, $(\frac{1}{2}, +\infty)$ da azalandır.

c) $f''(x) = \frac{-2\cdot(1+x^2) - (1-2x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2-2x^2-2x+4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2-2x-2}{(1+x^2)^2}$

$$= \frac{2(x^2-x-1)}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow$$

$x^2 - x - 1 = 0$, $\Delta = 1 - 4.1.(-1) = 5 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
f''	$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$
f	$\cup$		$\cap$		$\cup$

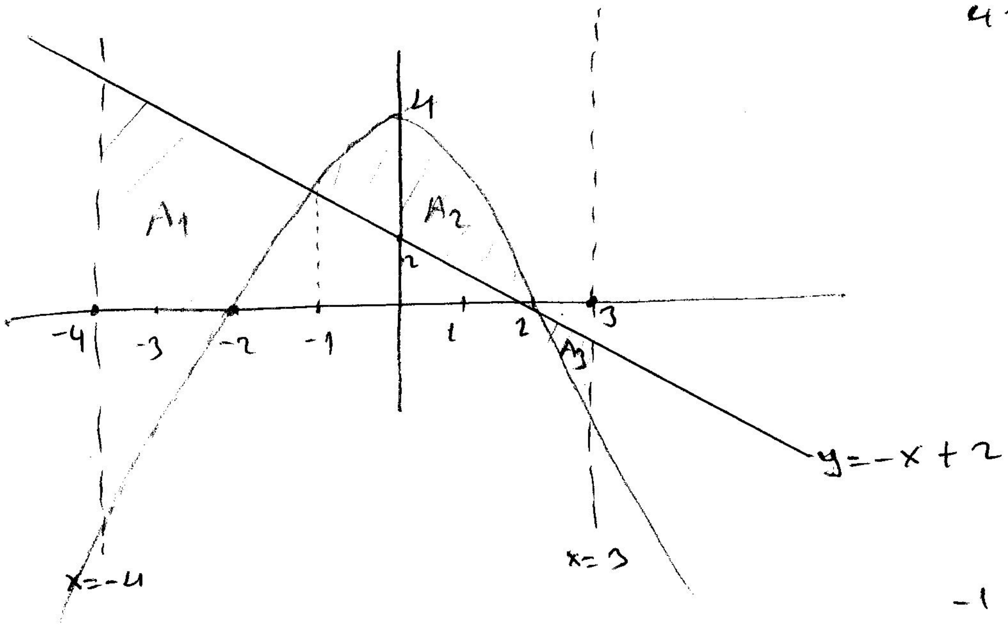
f, $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ aralığında konveks (dışbükey), $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ aralığında konkav (içbükey)

④ $y = 4 - x^2$, $y = -x + 2$, $x = -4$, $x = 3$ eğrileri ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

$4 - x^2 = -x + 2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x = 2$, $x = -1$



$$A_1 = \int_{-4}^{-1} (-x+2-4+x^2)\,dx = \left(-\frac{x^2}{2} + 2x - 4x + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-4}^{-1} = \frac{45}{2}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{2} (4 - x^2 + x - 2)\,dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} + 2x\right)\Big|_{-1}^{2} = 9/2$$

$$A_3 = \int_{2}^{3} (-x + 2 - 4 + x^2)\,dx = 10/3$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{45}{2} + \frac{9}{2} + \frac{10}{3} = \frac{131}{3} \text{ br}^2.$$

⑤ $\int \frac{x^5}{(x-1)^3}\,dx = ?$ $\quad x - 1 = u \Rightarrow dx = du$

$$\int \frac{x^5}{(x-1)^3}dx = \int \frac{(u+1)^5}{u^3}du = \int \frac{u^5 + 5u^4 + 10u^3 + 10u^2 + 5u + 1}{u^3}du$$

$$= \int \left(u^2 + 5u + 10 + \frac{10}{u} + \frac{5}{u^2} + \frac{1}{u^3}\right)du =$$

$$= \frac{1}{3}u^3 + \frac{5}{2}u^2 + 10u + 10\ln|u| - \frac{5}{u} - \frac{1}{2u^2} + c =$$

$$= \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{5}{2}(x-1)^2 + 10(x-1) + 10.\ln|x-1| - \frac{5}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + c$$

⑥ $\int \csc x \cdot \cot x \, dx = ?$ $\qquad (u = \sin x \Rightarrow du = \cos x \, dx)$

$$\int \csc x \cdot \cot x \, dx = \int \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{du}{u^2} = \frac{-1}{u} + c$$

$$= -\frac{1}{\sin x} + c$$

⑦ $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5} \, dx = ?$

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5} \, dx = \int \frac{3(x+1)-1}{x^2+2x+5} \, dx = 3 \cdot \int \frac{(x+1)\,dx}{(x+1)^2+2^2} - \int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2}$$

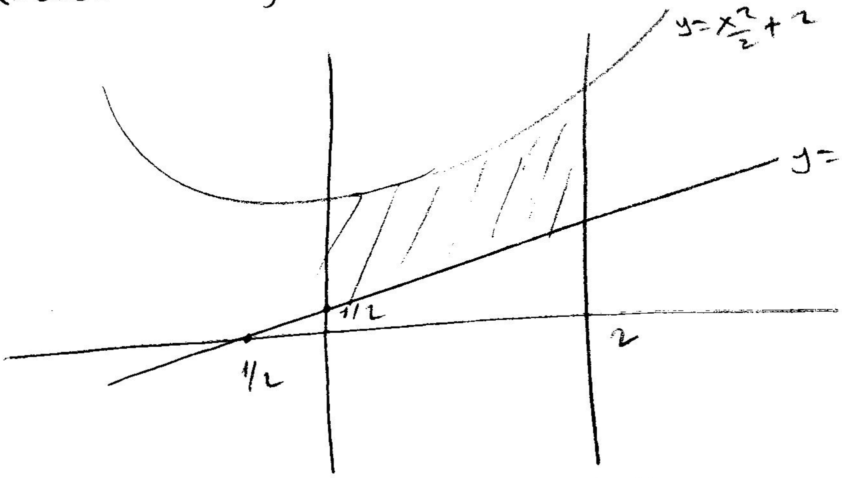
$(u = (x+1)^2+2^2 \Rightarrow du = 2(x+1)dx)$ $\qquad \left(\begin{array}{l} x+1 = 2\tan t, \ dx = 2\sec^2 t \, dt \\ (x+1)^2+2^2 = 4\tan^2 t + 4 = 4(1+\tan^2 t) = 4\sec^2 t \end{array} \right)$

$$= 3 \int \frac{\frac{du}{2}}{u} - \int \frac{2\sec^2 t \, dt}{4\sec^2 t}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \ln|u| - \frac{1}{2} \int dt = \frac{3}{2} \cdot \ln|x^2+2x+5| - \frac{1}{2} \cdot t + c$$

$$= \frac{3}{2} \ln|x^2+2x+5| - \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

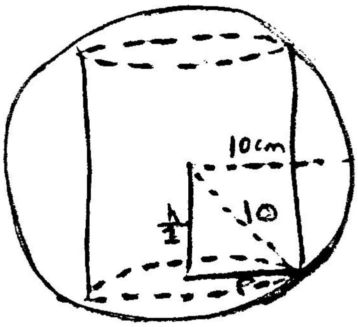
⑧ $y=\frac{x^2}{2}+2$, $y=x+\frac{1}{2}$, $x=0$, $x=2$ ile sınırlanan bölgenin x-ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.



$$V=\pi.\int_0^2 \left(\frac{x^2}{2}+2\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{293}{30}\pi \; br^3.$$

⑨ Yarıçapı 10cm olan bir küre içine yerleştirilebilecek en büyük hacimli silindirin yarıçapı ve yüksekliğini bulunuz.



$V=\pi.r^2.h$

$r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2=100 \Rightarrow r^2+\frac{h^2}{4}=100$

$r^2=100-\frac{h^2}{4} \Rightarrow r=\sqrt{100-\frac{h^2}{4}}$

$v(h)=\pi.\left(100-\frac{h^2}{4}\right).h=100\pi.h-\frac{\pi}{4}h^3$

$v'(h)=100\pi-\frac{3}{4}\pi.h^2 \Rightarrow v'(h)=0 \Rightarrow 100\pi-\frac{3}{4}\pi h^2=0$

$\Rightarrow \frac{3}{4}.\pi.h^2=100\pi \Rightarrow h^2=\frac{400}{3}$ $\quad h=\frac{20}{\sqrt{3}}$

$v''(h)=-\frac{3}{2}\pi h$, $\quad v''\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{3}{2}\pi.\frac{20}{\sqrt{3}}=-\frac{30\pi}{\sqrt{3}}<0$

$h=\frac{20}{\sqrt{3}}$
$r=\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{3}}$
} Hacmi en büyük yapan yükseklik ve yarıçap

10) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{x^2}{4}, & x \leq 2 \\ \frac{1}{x}, & x > 2 \end{cases}$ biçiminde tanımlanan $f(x)$ fonksiyonuna Lagrange Teoremi uygulanabilir mi? Neden?

<u>Çözüm:</u> $x > 2$ için $f(x) = \frac{1}{x}$, $x < 2$ için $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{x^2}{4}$ fonksiyonları süreklidir ve türevlidir. $x = 2$ kritik nokta

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} = f(2) = \frac{3}{2} - \frac{2^2}{4} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(\frac{3}{2} - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f,\ x=2 \text{ de sürekli.}$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\frac{2 - x}{2x}}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{\frac{3}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{3}{2} + 1}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-x^2 + 4}{4(x - 2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{4(x-2)} = -1$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \neq \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$ olduğundan f $x=2$ de türevlenemez. O halde ortalama değer teoremi uygulanamaz.